

## Devoir n° 1

À rendre le 14-12-2007 pendant la séance  
du cours d'Algèbre.

**Exercice 1:** Pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , on considère l'ensemble

$$H_k = \left\{ \left( x, k \left( x - \frac{1}{x} \right) \right) \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

-) Montrer que  $H_k$  est sous-groupe du groupe  $(G, +)$  de l'exercice n°3 de la série n°3.

**Exercice 2:** Soient  $(G, *)$  un groupe d'élément neutre  $e$  et  $a \in G$ ,  $a \neq e$ . On pose  $H = \{ x \in G \mid a * x = x * a \}$

-) Montrer que  $H$  est sous-groupe de  $(G, *)$ .

**Exercice 3:** Soit  $E$  un ensemble non vide et  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  une application bijective. On définit sur  $E$  une loi de composition interne  $*$  par :

$$\forall x, y \in E \quad : \quad x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

-) Montrer que  $(E, *)$  est un groupe abélien et que  $f$  est un isomorphisme de  $(E, *)$  dans  $(\mathbb{R}, +)$ .

**Exercice 4:** Montrer que les groupes  $(\mathbb{Q}, +)$  et  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  ne sont pas isomorphes.

**Exercice 5:** Un anneau  $(A, +, \times)$  est dit booléen si pour tout  $x \in A$  :  $x^2 = x$ .

1/ Montrer que pour tout ensemble  $E$ ,  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau booléen.

2/ Dans la suite,  $(A, +, \times)$  est supposé anneau booléen



non réduit à  $\{0\}$ .

- a) Montrer que pour tout  $x \in A$  :  $x + x = 0$
- b) En déduire que l'anneau  $(A, +, \cdot)$  est commutatif.
- c) On suppose que  $(A, +, \cdot)$  est intègre. Montrer, alors que  $\text{card } A \leq 2$ .

3) On désigne par  $E$  l'ensemble des éléments  $m$  de  $A$ , non nuls et tels que pour tout  $x \in A$ ,  $mx = 0$  ou  $mx = m$

-) Montrer que si  $m$  et  $m'$  sont deux éléments distincts de  $E$ ,  $mm' = 0$

4) - A tout élément  $x$  de  $A$  on associe l'ensemble des éléments  $m$  de  $E$  tels que  $mx = m$ . On note  $\phi(x)$  cette partie de  $E$

-) Montrer que pour tous,  $x, y$  de  $A$  :

a)  $\phi(xy) = \phi(x) \cap \phi(y)$

b)  $\phi(x+y+xy) = \phi(x) \cup \phi(y)$

c)  $\phi(1+x) = \phi(x)$

d)  $\phi(x+y) = \phi(x) \Delta \phi(y)$

e) En déduire que  $\phi$  est un morphisme de l'anneau  $(A, +, \cdot)$  dans  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ .

5) On suppose dans cette question que l'anneau  $A$  est fini.

a) Soit  $x_0 \in A$  non nul. Montrer que si  $x_0 \notin E$ , il existe  $x_1 \in A$  tel que  $x_0 x_1 \neq 0$  et  $x_0 x_1 \neq x_0$ . En déduire qu'il existe  $y \in A$  tel que  $x_0 y \in E$ .

b) En déduire que le morphisme  $\phi$  est injectif.

c) Soit  $F$  une partie de  $E$ . On désigne par  $S_F$  la somme des éléments de  $F$  (par convention  $S_\emptyset = 0$ )

-) Déterminer la partie  $\phi(S_F)$ . En déduire que le morphisme  $\phi$  est surjectif.

d) Énoncer une conclusion claire concernant les anneaux booléens finis et leurs cardinaux.





ETU SUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..